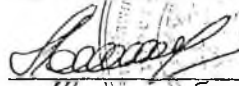


УТВЕРЖДАЮ

Начальник главного управления  
по образованию  
Могилевского облисполкома

  
А.Б.Заблоцкий  
«18» октября 2023 г.

### ЗАДАНИЯ

для проведения второго этапа республиканской олимпиады  
по учебному предмету «Математика»

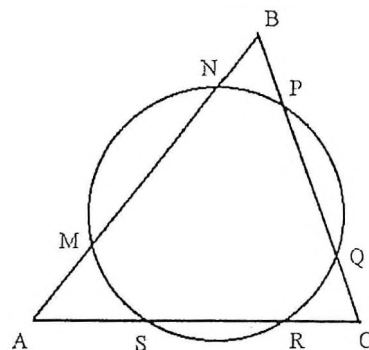
Дата проведения: 1 ноября 2023 г.

Время выполнения заданий: 10.00 – 15.00.

### Х класс

1. На координатной плоскости проведены две параллельные прямые. Первая проходит через начало координат точку  $O$ , вторая – через точку  $K(0; 8)$ . Первая прямая пересекает график функции  $y=x^2$  в точках  $O$  и  $A$ , вторая прямая пересекает график функции  $y=x^2$  в точках  $B$  и  $C$  (точки  $A$  и  $C$  лежат по одну сторону от оси  $OY$ ). Найти уравнения этих прямых, если площадь треугольника  $ABC$  равна 24.

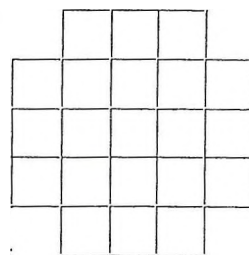
2. Окружность пересекает каждую сторону треугольника  $ABC$  в двух точках (см. рисунок): сторону  $AB$  в точках  $M$  и  $N$  (порядок точек:  $A, M, N, B$ ), сторону  $BC$  в точках  $P$  и  $Q$  (порядок точек:  $B, P, Q, C$ ), сторону  $AC$  в точках  $R$  и  $S$  (порядок точек:  $A, S, R, C$ ). Доказать, что если  $AM > BN$  и  $BP > CQ$ , то  $AS > CR$ .



3. Натуральное число  $n$  имеет 6 делителей. Известно, что сумма чисел, обратных его делителям, отличным от 1 и самого  $n$ , равна  $\frac{432}{n}$ . Найти все такие  $n$ .

4. В каждую клетку таблицы размера  $5 \times n$  (5 строк,  $n$  столбцов) записано одно из целых чисел от 0 до  $K$  ( $K > 0$ ). При каком наибольшем значении  $n$  при заданном значении  $K$  в таблицу можно записать числа таким образом, чтобы во всех строках сумма чисел была одинакова, а в любых двух столбцах различна?

5. На рисунке изображен план города. Городские кварталы имеют форму одинаковых квадратов. Стороны квадратов являются улицами. Длина каждой стороны (улицы) равна  $a$  км. Автомобилист хочет, выехав из какой-либо точки на одной из улиц города (по его выбору), проехать по каждой улице города не менее одного раза и в итоге вернуться в ту же точку. Какую наименьшую длину может иметь такой маршрут?





Оценка олимпиадных заданий  
по математике

Каждая задача оценивается **8** баллами.

Максимальное количество баллов за правильное выполнение заданий – **40**.

***Критерии оценки олимпиадных заданий:***

<i>Степень выполнения задания</i>	<i>Количество баллов</i>
Задача решена полностью (решение может отличаться от авторского)	<b>8</b>
Задача решена с недочетами или не все обоснования выполнены полностью	<b>5 – 7</b>
Задача решена наполовину	<b>4</b>
Правильно высказана идея, но ученик не смог ее реализовать	<b>1 - 2</b>
При решении допущены грубые ошибки	<b>1 – 3</b>
Дан правильный ответ, но нет решения	<b>1</b>
Учащийся только приступил к решению	<b>1 – 2</b>
Учащийся сделал несколько правильных шагов. <b>Нужно смотреть степень продвижения в решении</b>	<b>2– 7</b>



**Математика  
X класс. Решения.**

Решения учащихся могут отличаться от авторских!

**1. Решение:**

Пусть уравнение прямой  $OA$  имеет вид  $y=kx$ , тогда уравнение прямой  $BC$  имеет вид  $y=kx+8$ .

Пусть прямая  $BC$  пересекает ось  $OX$  в точке  $P(-\frac{8}{k}; 0)$ .

Площадь треугольника  $ABC$  найдем по формуле

$S = \frac{1}{2} BC \cdot AH$ , где  $AH$  – высота треугольника  $ABC$ .

Заметим, что высота  $AH$  треугольника  $ABC$  равна высоте треугольника  $POK$ , проведенной из вершины  $O$ ,

т.е.  $AH = \frac{PO \cdot OK}{PK}$ .

$$OK=8, OP = \left| -\frac{8}{k} \right| = \frac{8}{k}, \text{ для } k>0, PK = \sqrt{OK^2 + OP^2} = \sqrt{8^2 + \frac{8^2}{k^2}} = \frac{8}{k} \sqrt{1+k^2}.$$

$$\text{Тогда } AH = 8 \cdot \frac{\frac{8}{k}}{\frac{8}{k} \sqrt{1+k^2}} = \frac{8}{\sqrt{1+k^2}}.$$

Найдем длину стороны  $BC$ . Пусть точки  $B$  и  $C$  имеют следующие координаты:  $B(b; b^2)$ ,  $C(c; c^2)$ .

$$BC = \sqrt{(b-c)^2 + (b^2-c^2)^2} = \sqrt{(b-c)^2(1+(b+c)^2)} = |b-c| \sqrt{1+(b+c)^2}.$$

Поскольку точки  $B$  и  $C$  являются точками пересечения прямой  $BC$  и параболы  $y=x^2$ , то числа  $b$  и  $c$  являются корнями уравнения  $x^2 = kx + 8$ ,

$$x^2 - kx - 8 = 0.$$

$$b+c=k, bc=-8.$$

$$|b-c|^2 = (b+c)^2 - 4bc = k^2 + 32. \quad |b-c| = \sqrt{k^2 + 32}.$$

$$\text{Отсюда } BC = \sqrt{k^2 + 32} \cdot \sqrt{1+k^2}.$$

$$\text{Тогда площадь треугольника } ABC \text{ равна } S = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{\sqrt{1+k^2}} \cdot \sqrt{k^2 + 32} \cdot \sqrt{k^2 + 1} = 4\sqrt{k^2 + 32}.$$

Тогда  $4\sqrt{k^2 + 32} = 24$ . Отсюда  $k = \pm 2$ . Тогда уравнения прямых  $OA$  и  $BC$  соответственно имеют вид:  $y = \pm 2x$  и  $y = \pm 2x + 8$ .

**Ответ:**  $y = \pm 2x$  и  $y = \pm 2x + 8$ .

**2. Решение:**

Имеем:  $AM \cdot AN = AS \cdot AR$ ,

$BP \cdot BQ = BN \cdot BM$ ,

$CR \cdot CS = CQ \cdot CP$ .

Далее:  $AM \cdot (AB - BN) = AS \cdot (CA - CR)$ ,

$BP \cdot (BC - CQ) = BN \cdot (AB - AM)$ ,

$CR \cdot (CA - AS) = CQ \cdot (BC - BP)$ .

Раскроем скобки и сложим данные равенства:

$$AM \cdot AB - AM \cdot BN + BP \cdot BC - BP \cdot CQ + CR \cdot CA - CR \cdot AS = \\ = AS \cdot CA - AS \cdot CR + BN \cdot AB - BN \cdot AM + CQ \cdot BC - CQ \cdot BP,$$

или после упрощения

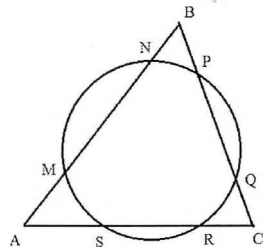
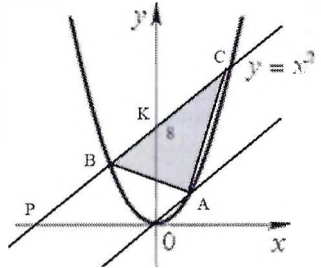
$$AM \cdot AB + BP \cdot BC + CR \cdot CA = AS \cdot CA + BN \cdot AB + CQ \cdot BC,$$

$$(AM \cdot AB - BN \cdot AB) + (BP \cdot BC - CQ \cdot BC) + (CR \cdot CA - AS \cdot CA) = 0,$$

$$AB \cdot (AM - BN) + BC \cdot (BP - CQ) + CA \cdot (CR - AS) = 0.$$

Если  $AM > BN$  и  $BP > CQ$ , то  $AB \cdot (AM - BN) > 0$  и  $BC \cdot (BP - CQ) > 0$ , но тогда из последнего равенства следует, что  $CA \cdot (CR - AS) < 0$ , что означает, что  $AS > CR$ .

**Что и требовалось доказать.**





### 3. Решение:

При решении задачи удобно использовать следующую известную теорему:

Пусть натуральное число  $n$  имеет следующее разложение на простые множители  $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$ , где  $p_1, p_2, \dots, p_k$  – различные простые делители числа  $n$ . Тогда количество делителей числа  $n$  (обозначается  $d(n)$ ) выражается формулой  $d(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1)$ . Искомое число  $n$  имеет 6 делителей, а поскольку  $6 = 5 + 1$  или  $6 = (1+1) \cdot (2+1)$ , то оно может иметь следующее разложение на простые множители:  $n = p^5$ , или  $n = pq^2$ , где  $p$  и  $q$  – различные простые числа.

1) Пусть  $n = p^5$ . Тогда делители числа  $n$  имеют вид  $1, p, p^2, p^3, p^4, p^5$ . По условию задачи имеем:  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^4} + \frac{1}{p^5} = \frac{432}{p^5}$  или  $p^5 + p^3 + p^2 + p + 1 = 432$ . При  $p=3$  левая часть последнего уравнения меньше 432, а при  $p=5$  она уже больше 432. Поэтому данное уравнение решений в простых числах не имеет.

2) Пусть  $n = pq^2$ . Тогда делители числа  $n$ :  $1, p, q, q^2, pq, pq^2$ . Тогда:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{pq} = \frac{432}{pq^2}, \text{ или}$$

$$q^2 + pq + p + q = 432;$$

$$(q+1)(p+q) = 2^4 \cdot 3^3.$$

Заметим, что  $q+1 \geq 2+1=3$ ,  $p+q \geq 2+3=5$ , кроме того,  $q+1 < p+q$ , отсюда  $q+1 < \sqrt{432} < 21$ .

Итак,  $3 \leq q+1 < 21$  (\*).

Выпишем делители числа 432, удовлетворяющие условию (\*). Для каждого найдем соответствующее значение  $p+q$ , а затем и значения  $p$  и  $q$ . Для удобства результаты оформим в виде таблицы:

$q+1$	$2^2$	$2^3$	$2^4$	3	$3^2$	2·3	$2 \cdot 3^2$	$2^2 \cdot 3$
$q$	3	7	15	2	8	5	17	11
$p+q$	$2^2 \cdot 3^3$	$2 \cdot 3^3$		$2^4 \cdot 3^2$		$2^3 \cdot 3^2$	$2^3 \cdot 3$	$2^2 \cdot 3^2$
$p$	105	47		142		67	7	25
$+/-$	–	+	–	–	–	+	+	–

Итак, возможны следующие пары чисел  $(p, q)$ : (47;7), (67;5), (17;7). Им соответствуют следующие значения  $n$ :  $47 \cdot 7^2 = 2303$ ,  $67 \cdot 5^2 = 1675$ ,  $7 \cdot 17^2 = 2023$ .

**Ответ: 2303, 1675, 2023.**

### 4. Решение:

Сумма чисел в одном столбце может принимать значения от  $0+0+0+0+0=0$  до  $K+K+K+K+K=5K$ , т.е.  $5K+1$  различных значений. Таким образом, значение  $n$  не может превышать  $5K+1$ . Приведем пример таблицы  $5 \times (5K+1)$ , удовлетворяющей требованиям задачи.

0	0	0	0	...	$K$	$K$	$K$	$K$
0	0	0	0	...	$K$	$K$	$K$	$K$
0	0	0	1	...	$K-1$	$K$	$K$	$K$
0	0	1	1	...	$K-1$	$K-1$	$K$	$K$
0	1	1	1	...	$K-1$	$K-1$	$K-1$	$K$
Сумма	0	1	2	3	$5K-3$	$5K-2$	$5K-1$	$5K$

Докажем, что данная таблица удовлетворяет условию задачи. Будем заполнять таблицу следующим образом. Сначала в крайний левый столбец ставим все нули, в каждую ячейку крайнего правого столбца ставим  $K$ . Остальные клетки пока пусты. Сумма чисел в каждой строке стала равна  $K$ .

0		...		$K$	Сумма
0		...		$K$	$K$
0		...		$K$	$K$
0		...		$K$	$K$
0		...		$K$	$K$
Сумма	0	...		$5K$	



Далее заполняем второй справа и второй слева столбцы следующим образом (см. рис.)

	0	0		...		$K$	$K$	Сумма $2K$
	0	0		...		$K$	$K$	$2K$
	0	0		...		$K$	$K$	$2K$
	0	0		...		$K$	$K$	$2K$
	0	1		...		$K-1$	$K$	$2K$
Сумма	0	1	...			$5K-1$	$5K$	

Следующий шаг (см. рис.)

	0	0	0		...		$K$	$K$	$K$	Сумма $3K$
	0	0	0		...		$K$	$K$	$K$	$3K$
	0	0	0		...		$K$	$K$	$K$	$3K$
	0	0	1		...		$K-1$	$K$	$K$	$3K$
	0	1	1		...		$K-1$	$K-1$	$K$	$3K$
Сумма	0	1	2	...			$5K-2$	$5K-1$	$5K$	

Далее действуем аналогично. При этом после заполнения очередной пары столбцов сумма чисел в каждой строке будет оставаться неизменной. А сумма чисел в каждом следующем столбце в левой части будет увеличиваться на 1, а в правой части уменьшаться на 1.

Рассмотрим момент, когда, левый и правый «потoki столбцов» встретятся.

Если  $K$  – четное, то количество столбцов в таблице будет нечетным. В этом случае потоки столбцов сойдутся в центральном столбце: в каждой клетке этого столбца будет записано число  $\frac{K}{2}$ . Этот столбец, а также соседние с ним столбцы будут иметь вид:

0	0		$K/2-1$	$K/2-1$	$K/2$	$K/2+1$	$K/2+1$		$K$	$K$
0	0		$K/2-1$	$K/2$	$K/2$	$K/2$	$K/2+1$		$K$	$K$
0	0	...	$K/2$	$K/2$	$K/2$	$K/2$	$K/2$	...	$K$	$K$
0	0		$K/2$	$K/2$	$K/2$	$K/2$	$K/2$		$K$	$K$
0	1		$K/2$	$K/2$	$K/2$	$K/2$	$K/2$		$K-1$	$K$
Сумма	0	1	$5K/2-2$	$5K/2-1$	$5K/2$	$5K/2+1$	$5K/2+2$		$5K-1$	$5K$

Если  $K$  – нечетное, то в таблице будет четное количество столбцов. Будем заполнять таблицу приведенным выше способом до тех пор, пока в крайнем правом столбце левого потока не будут записаны числа  $\frac{K-1}{2}$ , а крайнем левом столбце правого потока не будут записаны числа  $\frac{K+1}{2}$ .

0	0		$(K-1)/2$		$(K+1)/2$		$K$	$K$
0	0		$(K-1)/2$		$(K+1)/2$		$K$	$K$
0	0	...	$(K-1)/2$		$(K+1)/2$	...	$K$	$K$
0	0		$(K-1)/2$		$(K+1)/2$		$K$	$K$
0	1		$(K-1)/2$		$(K+1)/2$		$K-1$	$K$
Сумма	0	1	$(5K-5)/2$		$(5K+5)/2$		$5K-1$	$5K$

Между числами  $\frac{5K-5}{2}$  и  $\frac{5K+5}{2}$  нам необходимо вставить еще  $\frac{5K+5}{2} - \frac{5K-5}{2} - 1 = 4$  числа.

Это можно сделать, заполнив еще две пары столбцов.

0	0		$(K-1)/2$	$(K-1)/2$	$(K-1)/2$	$(K+1)/2$	$(K+1)/2$	$(K+1)/2$		$K$	$K$
0	0		$(K-1)/2$	$(K-1)/2$	$(K-1)/2$	$(K+1)/2$	$(K+1)/2$	$(K+1)/2$		$K$	$K$
0	0	...	$(K-1)/2$	$(K-1)/2$	$(K-1)/2$	$(K+1)/2$	$(K+1)/2$	$(K+1)/2$	...	$K$	$K$
0	0		$(K-1)/2$	$(K-1)/2$	$(K-1)/2$	$(K+1)/2$	$(K+1)/2$	$(K+1)/2$		$K$	$K$
0	1		$(K-1)/2$	$(K+1)/2$	$(K+1)/2$	$(K-1)/2$	$(K-1)/2$	$(K+1)/2$		$K-1$	$K$
0	1		$(5K-5)/2$	$(5K-3)/2$	$(5K-1)/2$	$(5K+1)/2$	$(5K+3)/2$	$(5K+5)/2$		$5K-1$	$5K$

Ответ:  $5K+1$ .



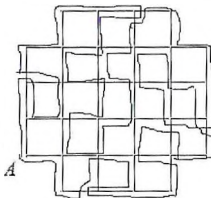
### 5. Решение:

#### Способ 1.

Несложно подсчитать, что всего в городе 52 улицы длиной 1 км. Вершины квадратов назовем перекрестками. Заметим, что к восьми перекресткам (они отмечены точками) подходит нечетное число улиц. По одной из улиц, подходящих к такому перекрестку, автомобилисту придётся проехать дважды. Поскольку отрезок соединяет два перекрестка, лишних проездов будет не менее  $8:2=4$ . Итого весь путь составит не меньше  $52+4=56$ .



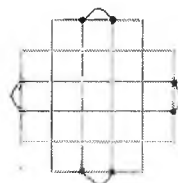
Пример на рисунке показывает, что путь такой длины возможен. Начало маршрута – точка A.



**Ответ: 56 км.**

#### Способ 2.

Рассмотрим план города как граф, у которого перекрестки являются вершинами, а улицы ребрами. Тогда данный граф имеет 52 ребра, из которых 8 вершин имеют нечетную степень, равную 3. Добавим в граф 4 ребра, соединив четыре пары вершин с нечетной степенью (см. рис). Теперь в графе 56 ребер и степени всех вершин четны. Согласно теореме Эйлера существует цикл, содержащий все ребра графа по одному разу. Поскольку длина каждого ребра равна 1 км, то длина соответствующего маршрута будет равна 56 км. Заметим, что при добавлении к исходному графу менее четырех ребер в нем останется вершина нечетной степени и требуемого цикла не будет.



**Ответ: 56 км.**

*Замечание.* При решении задачи вторым способом приводить пример требуемого цикла не обязательно. Теорема Эйлера доказывает его существование.